Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

НАУКА В РЕГИОНЫ

Я. С. Агаханова

Делимость чисел

Методические материалы
по математике
для учащихся 8 класса

Фонд развития
Физтех-лицея и Физтех-школ

Иннопрактика

МФТИ
Долгопрудный, 2018

УДК ???
ББК ???
А23

Агаханова Я. С.

А23 Делимость чисел: методические материалы по математике для учащихся 8 класса / Я. С. Агаханова. — Долгопрудный: МФТИ, 2018. — 39 с.

УДК ???
ББК ???

В настоящем пособии дается обзор приемов и методов, использующихся при решении задач по математике, с примерами решения задач различного уровня сложности.

Книга предназначается учащимся 8 класса школ с углубленным изучением математики, учителям математики, руководителям кружков и факультативов по математике, а также всем людям, увлекающимся математикой.

Агаханова Яна Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Содержание

Деление нацело

Определение. *Число a делится на число b* ($a \vdots b$), если существует такое целое число m, что выполнено равенство $a = bm$.

Это определение понятно: 8 делится на 2, то есть существует такое число 4, что $8 = 2 \cdot 4$.

Число m называется *частным* от деления a на b, число a — *кратным*, а число b — *делителем* a. Числа 2 и 3 являются делителями числа 6. В то же время 6 — кратное каждого из этих чисел. Когда речь идет о поиске делителей числа, то мы ищем положительные делители, если не оговорено противное.

Пример 1. Найдите делители числа 12.

Решение. Выпишем все делители числа 12: $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Всего их получилось 6

Мы рассмотрели делители одного числа, но можно искать общие делители двух и более чисел.

Пример 2. Найдите общие делители чисел 10 и 15.

Решение. Выпишем делители чисел 10 и 15: $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$, $D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$, $\Rightarrow D(10, 15) = \{1, 5\}$.

А теперь введём ещё одно понятие — *наибольший общий делитель* (НОД). В примере **2** — это 5. То есть мы находим общие делители, а затем выбираем наибольший.

Пример 3. Найдите НОД$(9, 12, 18)$.

Решение. Выпишем делители чисел 9, 12 и 18:

$$D(9) = \{1, 3, 9\}, \quad D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Поэтому НОД$(9, 12, 18) = 3$.

Найдём несколько кратных для числа 7: $K(7) = \{7, 14, 21, \ldots\}$.

А если для двух чисел 4 и 12, то:

$$K(4) = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}, \quad K(12) = \{12, 24, 36, \ldots\}.$$

Значит, $K(4, 12) = \{12, 24, 36, \ldots\}$. *Наименьшее общее кратное* (НОК) для 4 и 12 это 12.

Упражнения

Задача 1. Запишите множество делителей чисел 12, 15, 13, 24, 35.

Задача 2. Найдите НОД следующих чисел:

- 7 и 25;
- 8, 12 и 42;
- 3, 15 и 38;
- 4, 36 и 84.

Задача 3. Запишите множество кратных для каждого из чисел: 3, 5, 13, 21.

Задача 4. Найдите НОК чисел:

- 18 и 15;
- 5, 15 и 25;
- 3, 7 и 21;
- 7, 8 и 14.

Свойства делимости

Среди натуральных чисел есть простые и составные. Число является *составным*, если оно имеет более двух делителей. То есть хотя бы один делитель, кроме 1 и самого себя. Например, $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, у числа 6 есть делители 2 и 3, помимо 1 и 6.

Число является *простым*, если у него только два делителя: 1 и само число. Например, число 5: оно делится только на 1 и на 5.

Понятие «простое число» было введено Пифагором в VI веке до нашей эры. А в III веке до нашей эры Евклид доказал, что простых чисел бесконечно много. Эратосфен придумал способ составления простых чисел. Этот метод называется *решето Эратосфена*.

Составные числа можно разложить на множители. Например, $42 = 6 \cdot 7$, но число $6 = 2 \cdot 3$, тогда $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, где 2, 3, 7 — простые числа. Таким образом, число 42 можно разложить на простые множители.

Основная теорема арифметики. Любое составное число может быть представлено в виде произведения простых множителей. При этом два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться лишь порядком множителей.

Рассмотрим следующие свойства делимости.

1. Если одно из двух чисел делится на некоторое число, то и произведение делится на это число. Если $a \vdots k$, то $(a \cdot b) \vdots k$.

2. Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то и первое число делится на третье. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

3. Если два числа делятся на некоторое число, то их сумма и разность тоже делится на это число. Если $a \vdots m$, $b \vdots m$, то $(a+b) \vdots m$. Действительно, если $a \vdots m$, то $a = m \cdot c$, и если $b \vdots m$, то $b = m \cdot d$, тогда $a + b = mc + md = m(c + d)$, а $m(c + d) \vdots m$ по свойству 1.

4. Если одно из двух чисел делится на некоторое число, а другое не делится на это число, то их сумма и разность не делятся на это число.

Определение. Числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен единице.

Например, 15 и 49: $\text{НОД}(15, 49) = \text{НОД}(3 \cdot 5, 7 \cdot 7) = 1$.

Пример 4. Делится ли 111 на 3?

Решение. Разложим 111 на простые множители: $111 = 3 \cdot 37$, в произведение входит число 3, значит и всё произведение делится на 3.

Пример 5. Делится ли число 10 на 3?

Решение. Нет, так как $10 = 2 \cdot 5$, в разложении этого числа нет числа 3.

Пример 6. Определите, делится ли разность 930 и 754 на 10?

Решение. Нет, не делится: 930 делится на 10, а 754 не делится на 10. Поэтому $(930 - 754)$ не делится на 10.

Пример 7. Делится ли $19^2 - 8^2$ на 11?

Решение. Применим формулу разности квадратов:

$$19^2 - 8^2 = (19 - 8)(19 + 8) = 11 \cdot 27 \,\vdots\, 11.$$

Пример 8. Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2.

Решение. Среди двух подряд идущих натуральных чисел есть хотя бы одно чётное, а чётное делится на 2.

Упражнения

Задача 5. Докажите, что

- сумма $56056 + 112$ делится на 56;
- разность $24ab - 72$ делится на 8.

Задача 6. Делится ли

- 359 на 35;
- 891 на 9?

Задача 7. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

Задача 8. Заполните таблицу.

	$a \,\vdots\, m,\ b \,\vdots\, m$	$a \,\vdots\, m,\ b \not\vdots\, m$
$(a + b) \,\vdots\, m$		
$(a - b) \,\vdots\, m$		
$(a \cdot b) \,\vdots\, m$		

Признаки делимости

На 2. Число m делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра в записи числа m — чётная.

На 5. Число m делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра в записи числа 0 или 5.

На 10. Число m делится на 10 тогда и только тогда, когда последняя цифра в записи числа 0.

На 3. Число m делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа m делится на 3.

На 9. Число m делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа m делится на 9.

На 11. Число m делится на 11 тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр числа m делится на 11.

Пример 9. Число:

- 8553 делится на 3, так как $8 + 5 + 5 + 3 = 21$, а 21 делится на 3;
- 8163 делится на 9, поскольку $8 + 1 + 6 + 3 = 18$, а 18 делится на 9.

Любое число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых:

$$8553 = 8000 + 500 + 50 + 3 = 8 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 =$$

$$= 8\cdot 999+8+5\cdot 99+5+5\cdot 9+5+3 = (8\cdot 999+5\cdot 99+5\cdot 9)+(8+5+5+3) =$$

$$= (8 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + 21.$$

Заметим, что первая скобка делится на 3, и 21 делится на 3. Значит, и число 8553 делится на 3.

Обозначим $\overline{abc}$ число, у которого a, b, c — цифры, то есть

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c.$$

Такое представление полезно при решении некоторых задач, например.

Пример 10. Докажите, что если из числа вычесть сумму его цифр, то результат — кратное 9.

Решение. Рассмотрим число $\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$. Далее рассмотрим число $\overline{abcd} - (a + b + c + d) = (999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c) \vdots 9$.

Определение. Число $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ называется факториалом числа n, $0! \equiv 1$.

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Пример 11. На сколько нулей оканчивается 17!?

Решение. По определению $17! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 17$. Ноль мы получаем в конце числа только, если в произведение входят множители 10 или $5 \cdot 2$. То есть, если число разложить на простые множители, то число нулей на конце числа зависит от того сколько раз в него входит 5 и 2. Число 17! содержит в разложении 5, 10, 15, то есть 5 входит в разложение 3 раза. При этом, 2 в разложение входит больше трёх раз. Значит, 17! оканчивается тремя нулями.

Пример 12. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.

Решение. Заметим, что $225 = 9 \cdot 25$. Значит, чтобы число делилось на 225, оно должно делиться на 9 и на 25. Для того, чтобы число делилось на 9, по признаку делимости, сумма его цифр должна делиться на 9, а значит, в число должно входить 9 единиц.

Чтобы число делилось на 25, число, состоящее из последних двух цифр должно делиться на 25. Докажем это, рассмотрим число

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d.$$

Если $\overline{abcd} \vdots 25$ и, при этом $1000a \vdots 25$ и $100b \vdots 25$, то и $(10c + d) \vdots 25$. То есть как раз число, состоящее из двух последних цифр, делится на 25.

Тогда получим, что две последние цифры должны быть 00, 25, 50 или 75. Для нашей задачи подходит только 00. В таком случае, наименьшее число, которое делится на 225 — это 11111111100.

Пример 13. В слове **БОРМЕНТАЛЬ** каждая буква — это цифра, различные буквы — различные цифры. Докажите, что число **БОР-**

МЕНТАЛЬ составное.

Решение. В слове **БОРМЕНТАЛЬ** 10 разных букв, а значит, и различных чисел — 10. Таким образом, сумма цифр равна

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

А число $45 \,\vdots\, 3$ и $45 \,\vdots\, 9$. Значит, и число **БОРМЕНТАЛЬ** делится на 3 и на 9. Следовательно, оно является составным.

Упражнения

Задача 9. Определите, какие из чисел:

- 207, 321, 53, 954 делятся на 3;
- 120, 348, 554, 255 делятся на 5?

Задача 10. Разложите на простые множители число 750.

Задача 11. Найдите:

- $\text{НОД}(48, 36)$,
- $\text{НОК}(48, 36)$.

Задача 12. Вася записал пятизначное число, делящееся на 9. Переставил в нём несколько цифр и получил новое число. Делится ли это число на 9? Почему?

Задача 13. Может ли число $2a+2b$ быть простым?

Задача 14. Какую цифру нужно поставить вместо $*$, чтобы число $35*$ делилось на 2, но не делилось на 4? Рассмотрите все случаи!

Задача 15. Может ли сумма двух составных чисел быть простым числом? Ответ объясните.

Задача 16. Замените $*$ так, чтобы число было

- простым $8\,*$;
- составным $2*3$.

Задача 17. Выясните, являются ли взаимно простыми числа:

- 1008 и 1225;

- 1584 и 2695.

Задача 18. Двести коробок конфет необходимо упаковать и отправить в магазин. Сколько коробок конфет можно без остатка упаковать в ящики, вмещающие по

- 60 коробок;
- 45 коробок?

Задача 19. Наибольший общий делитель чисел a и b равен a. Найдите наименьшее общее кратное этих чисел.

Задача 20. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 120. Найдите эти числа, если их частное и их наибольший общий делитель соответственно равны 4 и 5.

Задача 21. Придумайте составное число, которое будет взаимно простым с каждым из чисел: 34, 77, 195.

Задача 22. Докажите, что число $3^{50}+1$ делится на 2.

Задача 23. Известно, что m и n — два различных простых числа. Найдите делители числа n^3m^2.

Задача 24. Число a — натуральное, меньше 45, и не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. Верно ли, что a — простое? Ответ объясните.

Задача 25. Лена и Маша измерили шагами одно и то же расстояние 143 метра. Причём длина шага Лены 55 сантиметров. Найдите длину шага Маши, если известно, что их следы 20 раз совпали. (Длина шага Маши выражается целым числом сантиметров.)

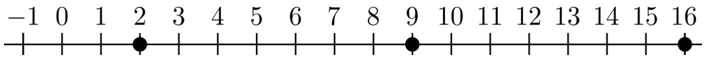
Задача 26. Вычеркните в числе 21459 две цифры так, чтобы оно делилось на 9.

Деление с остатком

Определение. *Разделить* натуральное число a на натуральное число n с *остатком* означает представить a в виде $a = nk+r$, где $0 \leqslant r < n$.

При этом r называется остатком от деления a на n. Если $r = 0$, то это деление называется *делением нацело.* То есть, деление нацело — частный случай деления с остатком.

Расширим данное выше определение: делимое может быть отрицательным. Числа с одинаковым остатком располагаются на числовой прямой через равные промежутки. Например, отметим на прямой натуральные числа, которые при делении на 7 дают остаток 2.



Соседние отмеченные числа находятся друг от друга на расстоянии 7. Это 2, 9, 16 и так далее. Если продолжим влево, то отмеченными будут также числа -5, -12, -19 и так далее. Таким образом, мы можем определить деление с остатком отрицательных чисел. Значит, определение деления с остатком в случае натуральных чисел и в случае целых чисел — одинаковы.

Теорема об однозначности деления с остатком. Деление с остатком осуществляется единственным образом. То есть, для любых чисел a и b существует единственная пара чисел k и r, таких что $a = nk + r$, где $r < n$.

Доказательство. Пусть

$$a = nk_1 + r_1, 0 \leqslant r_1 < n \text{ и } a = nk_2 + r_2, 0 \leqslant r_2 < n.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$n(k_1 - k_2) + r_1 - r_2 = 0, \quad n(k_1 - k_2) = r_2 - r_1.$$

Заметим, что в силу определения остатка: $-n < r_2 - r_1 < n$, то есть $-n < n(k_1 - k_2) < n$. Следовательно, $-1 < k_1 - k_2 < 1$, но это значит, что $k_1 = k_2$. Подставим это в первое равенство, получим $r_1 = r_2$, что и требовалось доказать.

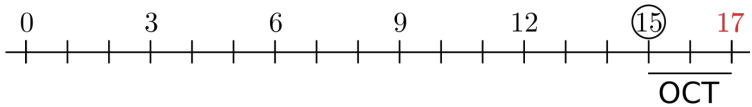
Делить с остатком можно разными способами. Например, уголком или графически. Отметим на координатной оси 0, $\pm n$, $\pm 2n$ и так далее. Теперь число a попадает либо на одно из отмеченных чисел (и тогда число a делится на n), либо в отрезок между двумя соседними отмеченными числами. Тогда множитель при n в левом числе будет частное при k, а расстояние от левого числа до a — остаток.

Пример 14. Разделим 17 на 3.

Решение. **Первый способ.** Разделим в столбик

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \cline{2-2} 15 & 5 \\ \cline{1-1} 2\,(\text{ост}) & \end{array}$$

Второй способ.



Обоими способами получаем $17 = 3 \cdot 5 + 2$.

Пример 15. Число a кратно 3. Может ли остаток от деления на 12 быть равным 2?

Решение. Предположим, что может. Тогда $a = 12k+2$. С другой стороны, $a \,\vdots\, 3$, значит $a = 3m$, $3m = 12k+2$, $\Rightarrow 3m - 12k = 2$. Так как $3m \,\vdots\, 3$ и $12k \,\vdots\, 3$, то и 2 должно делиться на 3. Мы получили противоречие — остаток от деления числа a на 12 не может быть равен 2.

Задача 27. Докажите, что, если натуральное число делится на 7, то при делении на 14, оно не может давать остаток 9.

Пример 16. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого натурального n.

Решение. Число n может давать при делении на 3 остатки 0, 1, 2.

1. Если n даёт остаток 0, то n^3 и $2n$ делятся на 3, поэтому $n^3 + 2n$ делится на 3.

2. Если n даёт остаток 1, то n^3 даёт остаток 1, $2n$ даёт остаток 2, поэтому $n^3 + 2n$ делится на 3.

3. Если n даёт остаток 2, то n^2 даёт остаток 1, а n^3 даёт остаток 2, $2n$ даёт остаток 1, поэтому $n^3 + 2n$ делится на 3.

Значит, для любого n выполнено, что $n^3 + 2n$ делится на 3.

Упражнения

Задача 28. Разделите с остатком:

- 237 на 5;
- -237 на 5;
- -98 на 7;
- -101 на 100.

Задача 29. Число a даёт остаток 6 при делении на 12. Может ли оно давать остаток 12 при делении на 20?

Задача 30. Среди чисел, больших 10, найдите наименьшее натуральное число, которое:

- даёт остаток 1 при делении на 2;
- даёт остаток 3 при делении на 13;
- даёт остаток 8 при делении на 17.

Задача 31. Для любого натурального n определите, чему равен остаток от деления:

- $5n + 4$ на 5;
- $6n + 2$ на 2;
- $10n + 6$ на 5.

Алгоритм Евклида

Ранее было введено понятие наибольшего общего делителя и нахождения его с помощью разложения чисел на простые множители. Однако, для больших чисел это очень трудоёмкий процесс. Но существует другой метод, позволяющий вычислить НОД двух чисел. Он называется алгоритмом Евклида. Основан он на следующем утверждении.

Теорема. Если $a = bc + r$, то НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

Доказательство. Для доказательства теоремы выясним, какими свойствами обладают общие делители чисел a, b и чисел b, r.

1. Докажем сначала, что всякий общий делитель чисел a и b является одновременно делителем числа r. Пусть d — общий делитель чисел a и b. Это значит, что существуют k и l, что $a = kd$ и $b = ld$. Подставим данные выражения в формулу деления a на b с остатком:

$$a = bc + r, \quad kd = ldc + r, \quad r = kd - ldc, \quad r = d(k - lc).$$

   Из последнего равенства видно, что d является делителем r.

2. Теперь докажем, что всякий общий делитель чисел b и r является одновременно делителем числа a. Пусть q является общим делителем чисел b и r. Это значит, что существуют такие натуральные числа m и n, что $b = mq$, $r = nq$. Подставим эти выражения в формулу деления a на b с остатком:

$$a = mqc + nq, \quad a = q(mc + n).$$

   Последнее равенство означает, что q является делителем a. Таким образом, мы получили, что множество общих делителей a и b совпадает с множеством общих делителей b и r. Следовательно, совпадает и их наибольший общий делитель, что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что вместо НОД(a, b) можно писать НОД(b, r).

1. Делим a на b с остатком r.

2. Делим b на r с остатком r_1.

3. Делим r на r_1 с остатком r_2.

4. И так далее…

Получили остатки $r, r_1, r_2, \ldots$ — целые неотрицательные числа, которые последовательно уменьшаются: $b > r > r_1 > r_2 > \ldots \geqslant 0$. И так как число целых неотрицательных чисел, меньших b, конечно, то на некотором шаге остаток от деления r_n на r_{n+1} будет равен нулю: $r_n = r_{n+1}c_{n+2} + 0$. В силу показанной выше теоремы:

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(r, r_1) = \ldots = \text{НОД}(r_{n+1}, 0) = r_{n+1}.$$

Значит, НОД чисел a и b равен последнему нетривиальному остатку в указанной цепочке делений.

Пример 17. Найдите $\text{НОД}(846, 246)$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\begin{aligned}
846 &= 246 \cdot 3 + 108,\\
246 &= 108 \cdot 2 + 30,\\
108 &= 30 \cdot 3 + 18,\\
30 &= 18 \cdot 1 + 12,\\
18 &= 12 \cdot 1 + 6,\\
12 &= 6 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Значит, $\text{НОД}(846, 246) = 6$.

Можно заметить, что верно равенство: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a - b)$.

Пример 18. Найти наибольший общий делитель чисел $2n+13$ и $n+7$.

Решение. Воспользуемся отмеченным выше свойством:

$$\text{НОД}(2n+13, n+7) = \text{НОД}(n+7, 2n+13-(n+7)) = \text{НОД}(n+7, n+6) =$$

$$= \text{НОД}(n + 6, n + 7 - (n + 6)) = \text{НОД}(n + 6, 1) = 1.$$

Пример 19. Докажите, что дробь

$$\frac{12n + 1}{30n + 2}$$

несократима ни при каком натуральном n.

Решение. Для того, чтобы доказать, что дробь несократима, необходимо показать, что наибольший общий делитель числителя и знаменателя равен 1:

$$\text{НОД}(12n+1, 30n+2) = \text{НОД}(12n+1, 30n+2-(12n+1)) =$$

$$= \text{НОД}(12n+1, 18n+1) = \text{НОД}(12n+1, 18n+1-(12n+1)) =$$

$$= \text{НОД}(12n+1, 6n) = \text{НОД}(6n, 12n+1-6n) =$$

$$= \text{НОД}(6n, 6n+1-6n) = \text{НОД}(6n, 1) = 1.$$

Упражнения

Задача 32. С помощью алгоритма Евклида найдите наибольший общий делитель чисел a и b:

- $a = 143$, $b = 247$;
- $a = 187$, $b = 319$;
- $a = 451$, $b = 533$;
- $a = 307$, $b = 945$;
- $a = 307$, $b = 867$;
- $a = 2581$, $b = 4005$.

Задача 33. Представьте дробь в несократимом виде:

- $\dfrac{545}{4578}$;
- $\dfrac{1067}{1552}$;
- $\dfrac{3201}{5335}$.

Задача 34. Найдите числа x и y, если известно, что

- $x/y = 5/2$ и $\text{НОД}(x, y) = 3$;
- $x/y = 4/3$ и $\text{НОД}(x, y) = 6$.

Задача 35. Найдите НОД$(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.

Задача 36. Найдите все значения m, для которых дробь $\frac{11m+3}{13m+4}$ сократима.

Задача 37. Докажите, что два соседних нечётных числа являются взаимно простыми.

Сравнение по модулю

Теорема. Целые числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

Доказательство. **Прямое утверждение.** Если целые числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, то их разность делится на m. Пусть $a = mc_1 + r$, $0 \leqslant r < |m|$, и $b = mc_2 + r$, $0 \leqslant r < |m|$. Вычтем первое из второго, получим:

$$a-b = mc_1+r-(mc_2+r) = mc_1+r-mc_2-r = mc_1-mc_2 = m(c_1-c_2).$$

Получим, что $a-b$ делится на m.

Обратное утверждение. Если разность целых чисел a и b делится на m, то числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m. Так как $a-b$ делится на m, то можно записать: $a-b = mc$, $c \in \mathbb{Z}$. Разделим число b на m, тогда:

$$b = mq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < |m|, \quad q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0.$$

Сложим левые и правые части равенств:

$$a - b + b = mc + md + r, \quad a = m(c+d) + r.$$

Мы получили, что a при делении на m имеет тот же остаток r.

Теорема доказана.

Определение. Если два целых числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на целое число m, то говорят, что a и b *сравнимы по модулю* m, и пишут: $a \equiv b \pmod{m}$.

Выражение $a \equiv b \pmod{m}$ называют *сравнением.*

Например,

$$9 \equiv 29 \pmod{10}, 1 \equiv 3 \pmod{2}, 3 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$2n+1 \equiv 1 \pmod{n}, -74 \equiv 14 \pmod{8}.$$

Теорема. Число a сравнимо с числом b по модулю m тогда и только тогда, когда разность a и b делится на m.

Сравнение по модулю обладает следующими свойствами.

1. **Рефлексивность**: любое число a сравнимо само с собой по модулю m $(a, m \in \mathbb{Z}, m > 0)$.

   Доказательство: $a - a = 0 = m \cdot 0$, для любого целого $m > 0$, Эта разность делится на m. Тогда по теореме $a \equiv a \pmod{m}$.

2. **Симметричность:** если число a сравнимо с числом b по модулю m, то число b сравнимо с числом a по тому же модулю $(a, b, m \in \mathbb{Z}, m > 0)$.

   Доказательство. По условию теоремы, $a \equiv b \pmod{m}$. Значит, по теореме, существует такое целое число c, что $a - b = mc$. Но $b - a = -(a - b) = -mc = m(-c)$, и поэтому $b - a$ также делится на m. Следовательно, $b \equiv a \pmod{m}$.

3. **Транзитивность:** если число a сравнимо с числом b по модулю m, а число b сравнимо с числом c по модулю m, то число a сравнимо с числом c по модулю m $(a, b, c, m \in \mathbb{Z}, m > 0)$

   Доказательство: $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m}$. Тогда существуют целые числа k и l, такие что $a - b = mk$ и $b - c = ml$, $a - c = (a - b) + (b - c) = mk + ml = m(k + l)$. Значит, $a - c$ делится на m. Тогда по теореме $a \equiv c \pmod{m}$.

Пример 20. Доказать, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

Решение. Так как $a - b$ делится на m и $c - d$ делится на m, то $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ делится на m.

Аналогично можно доказать, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

Пример 21. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Решение. Рассмотрим разность:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d),$$

$(a - b)c$ делится на m и $b(c - d)$ делится на m, значит $ac - bd$ делится на m.

Пример 22. Докажите, что число $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком целом n.

Решение. Каждое целое число n сравнимо по модулю 3 либо с 0, либо с 1, либо с 2:

- если $n \equiv 0 \pmod{3}$, то $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$ (умножение сравнений) и $n^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ (сложение сравнений);
- если $n \equiv 1 \pmod{3}$, то $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$;
- если $n \equiv 2 \pmod{3}$, то $n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$.

Таким образом, ни в одном случае мы не получили $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

Пример 23. Найти остаток от деления 6^{100} на 7.

Решение. Заметим, что $6 \equiv -1 \pmod{7}$. Возводя это сравнение в сотую степень, получим

$$6^{100} \equiv (-1)^{100} \pmod{7}, \quad 6^{100} \equiv 1 \pmod{7}.$$

В связи с этим решением отметим, что иногда бывает удобно использовать и отрицательные числа, сравнимые с данными.

Пример 24. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

Решение. Распишем сумму:

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^n 11^2 + 12^{2n} 12 = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} =$$
$$= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n}.$$

Так как $133 \cdot 11^n$ делится на 133, а $-12 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 12 \cdot (12^{2n} - 11^n) = 12 \cdot (144^n - 11^n) \equiv 0 \pmod{133}$.

Упражнения

Задача 38. Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с 235 по модулю:

- 3;
- 4;
- 5;
- 7.

Задача 39. Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m:

- $a = 2589$, $m = 11$;
- $a = 68952$, $m = 120$;
- $a = 63814$, $m = 131$;
- $a = 56400$, $m = 139$.

Задача 40. Докажите, что если некоторое число сравнимо с числом 198 по модулю 25, то оно сравнимо и с числом 35648 по этому же модулю.

Задача 41. Найдите три значения x, таких что:

- $x \equiv 5 \pmod{7}$;
- $x \equiv 3 \pmod{5}$;
- $x \equiv 11 \pmod{28}$;
- $x \equiv 19 \pmod{31}$.

Задача 42. Найдите два значения x, для которых верно данное сравнение:

- $x + 3 \equiv 6 \pmod{4}$;
- $x - 1 \equiv 7 + 5 \pmod{6}$;
- $2x + 6 \equiv x + 8 \pmod{7}$.

Задача 43. Докажите, что

- $a^3 - a$ делится на 3 для любого целого числа a;
- $a^3 + 11a$ делится на 6 для любого целого числа a.

Задача 44. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Задача 45. Докажите, что $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.

Задача 46. Докажите, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$, если n — нечётное число.

С помощью теории сравнений можно решать разные задачи, например, следующую.

Пример 25. Определите, каким днём недели будет 1 июня 2021 года, зная, что 1 сентября 2020 года был вторник.

Дни недели повторяются каждые 7 дней. Выберем точку отсчета вторник и каждому числу a поставим в соответствие день недели, который определяет остаток от деления a на 7. Получим:

- вторник — 0;
- среда — 1;
- четверг — 2;
- пятница — 3;
- суббота — 4;
- воскресенье — 5;
- понедельник — 6.

Посчитаем, сколько дней пройдёт с 1 сентября 2020 года до 1 июня 2021: $30 \cdot 3 + 31 \cdot 5 + 28 = 273$ дня, $273 \equiv 0 \pmod 7$, значит, 1 июня 2021 года будет тоже вторник. Сравнения помогают находить остатки от деления, не производя громоздких вычислений. Например, найдем остаток от деления на 7 натуральных степеней числа 3:

$$\begin{gathered}
3^1 \equiv 3 \pmod 7,\\
3^2 \equiv 2 \pmod 7,\\
3^3 \equiv 6 \pmod 7,\\
3^4 = (3^2)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 7,\\
3^5 = 3^1 \cdot 3^4 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 5 \pmod 7,\\
3^6 = 3^1 \cdot 3^5 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv 1 \pmod 7,\\
3^7 = 3^1 \cdot 3^6 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod 7,\\
3^8 = 3^1 \cdot 3^7 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7,\\
3^9 = 3^1 \cdot 3^8 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \pmod 7.
\end{gathered}$$

Заметим, что остатки $3, 2, 6, 4, 5, 1$, и опять повторяются. Таким образом, не выполняя громоздких вычислений самих степеней, мы с помощью сравнений смогли быстро найти остатки от деления на 7 всех чисел вида 3^n $(n \in \mathbb{N})$.

Остаток r при делении на 7 чисел вида 3^n равен:

- 3, если $n = 6k + 1$;
- 2, если $n = 6k + 2$;
- 0, если $n = 6k + 3$;
- 4, если $n = 6k + 4$;
- 5, если $n = 6k + 5$;
- 1, если $n = 6k + 6$.

Пример 26. Найти остаток от деления 304^{226} на 7.

Решение. Разделим 304 на 7: $304 = 7 \cdot 43 + 3$, значит, $304 \equiv 3 \pmod 7$. Тогда $304^{226} \equiv 3^{226} \pmod 7$.

В предыдущей задаче мы выяснили, что остаток от деления чисел вида 3^n на 7 зависит от того, какой остаток при делении на 6 дает показатель степени $226 = 6 \cdot 37 + 4$. То есть, имеем

$$304^{226} \equiv 3^{226} \equiv 3^4 \equiv 4 \pmod 7.$$

Значит число 304^{226} при делении на 7 будет иметь остаток 4.

Упражнения

Задача 47. Зная, что 1 сентября 2018 года — суббота, определите:

- каким днём недели будет 1 декабря 2018 года;
- каким днём недели будет 8 марта 2019 года;
- каким днём недели будет 1 июня 2019 года.

Задача 48. Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b, если:

- $a = 2$, $b = 3$;
- $a = 2$, $b = 5$;
- $a = 3$, $b = 7$;

- $a = 3$, $b = 5$;
- $a = 3$, $b = 11$?

Задача 49. Определите, не вычисляя частного, делится ли число a на 11:

- $a = 124567$;
- $a = 6267059$.

Задача 50. Найдите остаток от деления a на b, если:

- $a = 444^{333}$, $b = 7$;
- $a = 222^{333}$, $b = 5$;
- $a = 2^{431}$, $b = 11$.

Задача 51. Определить, делится ли число a на b, если:

- $a = 333^{777} + 777^{333}$, $b = 5$;
- $a = 2^{100} + 3^{100}$, $b = 7$;
- $a = 11^{100} - 1$, $b = 5$.

Задача 52. Какой цифрой оканчивается число:

- 333^{555};
- 777^{111};
- 222^{222}.

Задача 53. Числа 3311, 1935, 1376 дают равные остатки при делении на натуральное число большее 1. Найдите это число.

Задача 54. Найдите трехзначное натуральное число, которое при делении на 3, 5 и на 7 дает остатки, равные 2, и в записи которого есть только 2 различные цифры.

Задача 55. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \ldots + 10^{10\,000\,000\,000}.$$

Уравнения в целых числах

Уравнения в целых числах — это алгебраические уравнения с двумя или более неизвестными переменными и целыми коэффициентами. Решениями такого уравнения являются все целочисленные (иногда натуральные) наборы значений неизвестных переменных, удовлетворяющих этому уравнению.

Такие уравнения ещё называют диофантовыми в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского, который исследовал некоторые типы таких уравнений еще до нашей эры.

Современной постановкой диофантовых задач мы обязаны французскому математику Ферма. Именно он поставил вопрос о решении неопределённых уравнений только в целых числах. Наиболее известное уравнение в целых числах — великая теорема Ферма: $x^n+y^n = z^n$ не имеет ненулевых натуральных решений для всех натуральных $n > 2$.

В 1970 году ленинградский математик Юрий Владимирович Матиясевич доказал, что общего способа, позволяющего за конечное число шагов решать в целых числах произвольные диофантовы уравнения, не существует и быть не может. Потому для разных типов уравнений выбирать собственные методы решения. При решении в целых и натуральных числах можно условно выделить следующие методы:

- способ перебора вариантов;
- применение алгоритма Евклида;
- разложение на множители;
- решение уравнения в целых числах, как квадратного относительно какой-либо одной переменной;
- метод остатков;
- и другие...

Пример 27. Решите уравнение $3x + 5y = 7$ в целых числах.

Решение. Найдём какое-нибудь решение:

$$x_0 = 14 \text{ и } y_0 = -7, \quad 3 \cdot 14 + 5 \cdot (-7) = 42 - 35 = 7.$$

Тогда можно записать $3x_0+5y_0 = 7$. Вычтем это уравнение из данного, получим

$$3x - 3x_0 + 5y - 5y_0 = 7 - 7, \quad 3(x - x_0) + 5(y - y_0) = 0.$$

Для того, чтобы было решение необходимо, чтобы $(x - x_0)$ делилось на 5, а $(y - y_0)$ — на 3. Пусть $x - x_0 = 5k$, а $y - y_0 = -3k$, то есть $x = 14 + 5k$, $y = -7 - 3k$, где k — целое число. Мы получили решение.

Пример 28. Решите уравнение $1990x - 173y = 11$.

Решение. В этом уравнении числа велики настолько, что подбором здесь конкретного решения не найти. Поможет то, что числа 1990 и 173 взаимно просты: 173 — простое, $1990 = 199 \cdot 2 \cdot 5$, $\text{НОД}(1990, 173) = 1$.

Пусть m и n — некоторые числа. При помощи алгоритма Евклида мы получим решение уравнения $1990m - 173n = 1$: $m = 2$, $n = 23$. Тогда $x_0 = 22$, $y_0 = 253$ — решение исходного уравнения. Далее, как в предыдущем примере, получим решения:

$$x = 22 + 173k, \quad y = 253 + 1990k, \text{ где } k \text{ — целое число.}$$

Теорема. Если в уравнении $Ax+By = C$ числа A и B взаимно просты, то существуют целые числа x_0 и y_0 такие, что $Ax_0 + By_0 = C$, и все решения уравнения $Ax + By = C$ имеют вид: $x = x_0 + Bk$, $y = y_0 - Ak$, где k — целое число.

Пример 29. (И. Анулич, Квант, №4, 1995)

Шли сорок мышей,
Несли сорок грошей,
Две мыши поплоше
Несли по два гроша,
Немало мышей —
Вообще без грошей.
Большие совсем —
Тащили по семь.
А остальные
Несли по четыре.
Сколько мышей
Шли без грошей?

Решение. Обозначим количество мышей, которые ничего не несли, через n, больших через b, а остальных — через s. Получим $n+b+s+2 = 40$ — это количество мышей.

А теперь составим уравнение для грошей:

$$n \cdot 0 + b \cdot 7 + s \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 40.$$

Упростим: $7b + 4s = 36$. Мы получили диофантово уравнение: $b_0 = 0$, $s_0 = 9$, $b = 4k$, $s = 9 - 7k$, где k — целое.

Согласно условию задачи, нам нужны только положительные решения, $k = 1$, $b = 4$, $s = 2$. Теперь найдем $n = 40-2-s-b = 38-2-4 = 32$. Значит, 32 мыши шли без грошей.

При решении уравнений в целых числах часто приходится использовать теорию о делимости.

Пример 30. Имеет ли решение диофантово уравнение $5x + 10y = 17$.

Решение. Оба слагаемых в левой части уравнения кратны 5, а правая — нет. Значит, это уравнение не имеет решений.

Пример 31. Докажите, что уравнение $x^2(x^2 + 5) = 2000$ не имеет решений в целых числах x.

Решение. Заметим, что $x^2(x^2 + 5) \vdots 3$ при всех целых x. Если $x \vdots 3$, то это очевидно. Если нет, то x имеет вид: $x = 3k + 1$ или $x = 3k + 2$, тогда $x^2 = 3m + 1$ и поэтому $(x^2 + 5) \vdots 3$.

Но 2000 не делится на 3. Значит исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 32. Решите уравнение $(x + 1)(5x + 2) = 14$ в натуральных числах.

Решение. Разложим число 14 на два множителя:

$$1 \cdot 14, 2 \cdot 7, 7 \cdot 2, 14 \cdot 1.$$

В левой части уравнения тоже произведение двух множителей. Так как мы ищем решение в натуральных числах, то $x + 1$ и $5x + 2$ тоже будут натуральными числами.

Рассмотрим все возможные случаи:

$$1)\ \begin{cases} x+1=1, \\ 5x+2=14; \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x+1=7, \\ 5x+2=2; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x+1=2, \\ 5x+2=7; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x+1=14, \\ 5x+2=1. \end{cases}$$

Только система (2) дала решение $x = 1$. Значит, решение данного уравнения одно $x = 1$.

Пример 33. Решить в целых числах: $xy = x + y + 3$.

Решение. Разложим на множители:

$$xy - x - y = 3; \quad x(y-1) + 1 - 1 - y = 3; \quad x(y-1) + (1-y) = 4;$$

$$x(y-1) - (y-1) = 4; \quad (y-1)(x-1) = 4$$

Осталось перебрать возможные разложения 4 в произведение двух целых множителей

$$4 = 4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = (-4) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-4) = (-2) \cdot (-2):$$

$$\begin{cases} y-1=4, \\ x-1=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y-1=-4, \\ x-1=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-1=1, \\ x-1=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} y-1=-1, \\ x-1=-4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-1=2, \\ x-1=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} y-1=-2, \\ x-1=-2. \end{cases}$$

Решив все системы уравнений, получим:

$$(5{,}2); \quad (2{,}5); \quad (3{,}3); \quad (-3{,}0); \quad (0,-3); \quad (-1,-1).$$

Пример 34. Решите в целых числах уравнение: $x^2 + y^2 = 4z - 1$.

Решение. Преобразовать это уравнение к более удачному виду не удается, сделать перебор также не получится. Это новый представитель диофантового уравнения, и решений в целых числах у него нет. Тогда нужно доказать это.

Рассмотрим, какие остатки могут давать точные квадраты по модулю 4. Недолгий перебор показывает, что 0 и 1. Так как сумма двух остатков такого вида не может давать -1, а правая часть дает остаток -1, значит мы получаем, что данное уравнение не имеет решений.

Пример 35. Решите в целых числах уравнение: $3 \cdot 2^n + 1 = n^2$.

Решение. Так как $3 \cdot 2^n$ делится на 3, то $3 \cdot 2^n + 1$ не делится на 3, и значит, n не делится на 3. Поэтому, $n = 3k + 1$, или $n = 3k + 2$. Если:

- $n = 3k+2$, то $3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 12k + 4$, $\Rightarrow 3 \cdot 2^m = 9k^2 + 12k + 3$, $\Rightarrow 2^m = 3k^2 + 4k + 1$, $\Rightarrow 2^m = (3k + 1)(k + 1)$. Следовательно, $k+1$ и $3k+1$ — степени двойки. Значения $k = 0$, $k = 1$ подходят, тогда $n = 2$, $m = 1$ и $n = 5$, $m = 3$.
  Но при $2 \leqslant k$ $4(n+1) > 9k+1 > 2(n+1)$ и, следовательно, $n+1$ и $3n + 1$ не могут одновременно быть степенями двойки.
- $n = 3k + 1$, то $3 \cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 6k + 1$, $\Rightarrow 3 \cdot 2^m = 9k^2 + 6k$, $\Rightarrow 2^m = 3k^2 + 2k$, $\Rightarrow 2^m = k \cdot (3k + 2)$, $\Rightarrow k = 2$, $n = 7$, $m = 4$.

Вместе с идеей перебора и остатков и идеей разложения на множители, мы используем идею оценки. При решении диофантовых уравнений очень полезно использовать неравенства и оценки.

Упражнения

Задача 56. Решите уравнения в целых числах:

- $15x + 17y = 1$;
- $15 + 17y = 9$;
- $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.

Задача 57. Имеют ли решения следующие уравнения:

- $6x + 8y = 9$;
- $25x + 10y = 55$;
- $12x + 15y = 22$;
- $24x + 18y = 2010$?

Задача 58. Докажите, что уравнения не имеют решений в целых числах:

- $2x^2 + 164x = 2005$;
- $x(x + 2)(4x + 1) = 2005$;
- $x^2 - 1 = 7$.

Задача 59. Докажите, что уравнения не имеют решений в натуральных числах:

- $5x^3 + 4x = 3$;
- $3x + 5x^4 = 4$;
- $\frac{x+1}{x} + \frac{x^3+1}{x^3} = 1$.

Задача 60. Решите уравнение в натуральных числах:

- $6x^2 + 3x = 8$;
- $x(x + 1)(x + 2) = 6$;
- $x(x + 2)(x + 4) = 15$.

Задача 61. Решите уравнение в целых числах:

- $x(x + 2) = 3$;
- $x(x - 5) = 6$;
- $x^2(x + 2) = 11$;
- $x(x - 3) = 10$.

Задача 62. Рассмотреть остатки по какому-либо модулю:

- $x^2 - 7y = 10$;
- $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.

Задача 63. В прямоугольной таблице несколько строк и несколько столбцов. Столбцов на четыре больше, чем строк. Всего в таблице 45 клеток. Сколько всего в таблице строк и сколько всего столбцов?

Задача 64. В выпуклом многоугольнике девять диагоналей. Сколько вершин у этого многоугольника?

Задача 65. Винни Пух хотел съесть несколько коробок конфет «Белочка», но потом передумал и съел несколько коробок «Грильяж». Но в коробке «Грильяж» конфет оказалось на 4 меньше, чем в коробке «Белочка». Поэтому, чтобы съесть запланированное количество конфет — 120 штук, Винни-Пуху пришлось съесть на одну коробку конфет больше, чем он рассчитывал. Сколько коробок конфет съел Винни?

Комбинаторика

Определение. *Комбинаторика* — это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами.

Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающие заданными свойствами. Введение комбинаторики как раздела математики связано с трудами великих французских математиков XVII века Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665) по теории азартных игр.

Основные правила комбинаторики — это правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то выбор «либо A, либо B» можно сделать $m+n$ способами.

Пример 36. На столе лежат 7 слив и 16 яблок. Тогда один фрукт можно выбрать $7+16=23$ способами.

Правило произведения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то пару «A и B» можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Пример 37. Есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколько есть способов выбрать чашку с блюдцем?

Решение. Выберем чашку, к ней можно выбрать одно из 3 блюдец. Но чашек у нас 5, значит способов выбрать чашку с блюдцем $5 \cdot 3 = 15$.

Упражнения

Задача 66. На полке стоят 10 книг по математике, 6 книг по физике и 4 книги по химии. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

Задача 67. Имеется три города A, B и C. Из A в B ведут три дороги, из B в C — пять дорог. Сколько различных путей ведут из A в C? Прямых путей из A в C нет.

Задача 68. В магазине 7 видов рубашек, 5 видов брюк и 4 вида пиджаков. Сколькими способами можно купить комплект из рубашки, брюк и пиджака?

Задача 69. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры — чётные?

Пример 38. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Решение. Каждая монета имеет две стороны: орёл или решка, а бросают её три раза. Значит, различных последовательностей будет $2^3 = 8$.

Задача 70. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

Задача 71. В команде 11 человек, нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами можно это сделать?

Задача 72. В киоске продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

Задача 73. Для обозначения текущих дел в канцелярии применяют индекс, состоящий из одной буквы и одного числа, причем используют 30 букв и 100 чисел. Сколько дел можно так обозначить?

Задача 74. На балу присутствовали 30 кавалеров и 25 дам. Сколько существует способов составить пару для танца?

Рассмотрим теперь подсчет числа способов, которыми можно расположить в ряд n предметов. Такие расположения называют перестановками.

Определение. *Перестановками* называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающихся только порядком их расположения.

Число возможных перестановок рассчитывается по формуле: $P_n = n!$.

Пример 39. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры $1, 2, 3$ встречаются ровно по одному разу?

Решение. На первое место можно поставить любую из трёх цифр, на второе — любую из двух оставшихся, а на третье — только последнюю оставшуюся цифру. Таким образом, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $P_3 = 3! = 6$.

Упражнения

Задача 75. Сколькими способами можно выложить в ряд белый, черный, зеленый и синий шарики?

Задача 76. Сколько можно составить слов из 6 различных букв?

Пример 40. А сколько слов можно составить из слова **МАТЕМАТИКА**?

Решение. В этом слове есть одинаковые буквы: 3 буквы **А**; 2 буквы **М**; 2 буквы **Т**.

На время будем считать, что все буквы разные, тогда получится 10! разных слов. Но в этом случае подсчитаны и те исходы, когда просто переставили только, например, буквы **А** местами — способ был посчитан, а слово получится одно и то же.

Значит, нам нужно исключить эти исходы, тогда получим число различных слов равное $\frac{10!}{3!2!2!}$.

Задача 77. Сколько можно составить слов из **МЕДИАНА** и **ПАРАБОЛА**?

Задача 78. Двести солдат строятся в шеренгу. Сколько имеется способов это сделать?

Задача 79. У мамы есть три шоколадки: «Марс», «Баунти» и «Сникерс». Сколькими способами можно раздать шоколадки, если у неё трое детей, но «Марс» не достанется старшему?

Задача 80. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если использовать трёх срочных курьеров?

Задача 81. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

Определение. *Размещениями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждом, которые отличаются либо элементами, либо их порядком

Число возможных размещений: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.

Пример 41. Сколько можно составить двухзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение. Возьмем первой единицу, с ней можно составить числа 12, 13, 14, 15, 16, но если поменять местами цифры, то получим другие двузначные числа: 21, 31, 41, 51, 61.

Теперь с первой двойкой и так далее.

Получим $5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 30$. А можно по формуле: $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Задача 82. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различны и нечетны?

Определение. *Сочетаниями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m в каждом, которые отличаются хотя бы одним элементом.

При подсчете сочетаний порядок элементов не важен. $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$, $C_n^0 = 1$. Читается «число сочетаний из n элементов по m».

Пример 42. Из класса, в котором 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для дежурства. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Первого ученика можно выбрать 30 способами. Второго, независимо от выбора первого ученика, — 20 способами. При этом каждая пара учитывается дважды. Поэтому ответ: $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ способов.

А теперь представим, что нужно выбрать не два ученика, а 12. Тогда это легко можно вычислить по формуле сочетаний:

$$C_{30}^{12} = \frac{30!}{12!18!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 30}{1 \cdot 2 \cdots 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 18} = \frac{19 \cdot 20 \cdots 30}{1 \cdot 2 \cdots 12} = 19{\cdot}7{\cdot}23{\cdot}25{\cdot}13{\cdot}3{\cdot}29.$$

Можно пользоваться формулой вида $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ в этой формуле числитель — это число размещений A_n^k.

Рассмотрим некоторые свойства числа сочетаний:

- $C_n^{n-k} = C_n^k$;
- $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Пример 43. Сколькими способами можно выбрать 4 цветных карандаша из 7 различных?

Решение. Выбираем 4 из 7 — число сочетаний $C_7^4 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35$.

Ответ: 35 способами.

Пример 44. У школьника есть 6 книг по математике, а у другого школьника — 8 книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на 3 книги другого?

Решение. Первый школьник может выбрать 3 книги из 6 для обмена, то есть $C_6^3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$ способами, а второй — $C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56$ способами. Таким образом, $20 \cdot 56 = 1120$ вариантов.

Пример 45. В математическом кружке занимались 2 девочки и 8 мальчиков. Для математического боя необходимо составить команду из 4 человек, в которой обязательно должна входить хотя бы одна девочка.

Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В команду входят либо одна девочка и 3 мальчика, либо 2 девочки и два мальчика. Рассмотрим два случая.

В команде 1 девочка и три мальчика. Количество способов взять одну девочку и трёх мальчиков $C_2^1 \cdot C_8^3 = 2 \cdot \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 2\cdot8\cdot7 = 112$ способов взять одну девочку и три мальчика.

В команде 2 девочки и 2 мальчика. Количество способов взять двух девочек и двух мальчиков $C_2^2 \cdot C_8^2 = 1 \cdot \frac{7\cdot8}{1\cdot2} = 28$.

Тогда по правилам сложения получим $112+28=140$.

Упражнения

Задача 83. На плоскости лежат 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Задача 84. Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию из 15 человек?

Задача 85. Из 5 математиков и 4 физиков надо составить комиссию, состоящую из двух математиков и одного физика. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 86. В ящике 15 шаров: 7 красных и 8 белых. Сколькими способами можно вытянуть 2 красных и 1 белый шар?

Задача 87. В классе 11 мальчиков и 13 девочек. Сколькими способами можно выбрать двух человек, но только одного пола?

Задача 88. Сколько существует трехзначных чисел, которые делятся на 5?

Задача 89. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (36 карт) 10 карт так, чтобы среди них был ровно один туз?

Задача 90. Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три четных и нечетных цифры?

Принцип Дирихле

Принцип Дирихле помогает при решении многих логических и комбинаторных задач. Его сформулировал немецкий математик Дирихле́ (1805–1859). Принцип устанавливает связь между объектами («кроликами») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий. Принцип Дирихле формулируется следующим образом.

Пусть в n *клетках* сидит не меньше, чем $n+1$ *кроликов.* Тогда найдётся клетка, в которой сидит не меньше двух кроликов. Это утверждение помогает в решении самых разных задач. Главное понять, что есть в денной задаче клетка, а что — кролики.

Пример 46. Пять девочек съели 6 конфет. (Конфеты не делились на части.) Докажите, что есть девочка, которая съела по крайней мере 2 конфеты.

Решение. Роль клеток играют девочки, а роль кроликов — конфеты. «Клеток» — 5, а «кроликов» — 6. Тогда по принципу Дирихле найдётся одна девочка, съевшая по крайней мере две конфеты.

Пример 47. В классе 26 человек. Во время диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что в классе найдётся по крайней мере 3 ученика, сделавшие одинаковое количество ошибок.

Решение. Двадцать пять учеников сделали от 0 до 11 ошибок — всего 12 возможностей. Если в классе нет трёх человек, сделавших одинаковое количество ошибок, то каждую из этих 12 возможностей осуществило не более двух человек. То есть всего от 0 до 11 ошибок сделали 24 ученика. Но у нас 25 учеников!

Пример 48. В ящике лежат носки двух разных цветов: чёрного и белого. Какое наименьшее число носков нужно вытащить из ящика, чтобы среди них заведомо оказалось два носка одного цвета?

Решение. Достанем 3 носка. Если бы среди этих носков было бы не более одного носка каждого из двух цветов, то всего было бы не более двух носков. А это противоречит тому, что мы достали три носка. Это значит, что трёх носков достаточно. С другой стороны понятно, что двух носков может и не хватить. Ясно, что «кроликами» здесь являются носки, а «ящиками» — цвета: чёрный и белый.

Пример 49. В классе 15 учеников. Найдётся ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем 2 ученика этого класса?

Решение. Всего в году 12 месяцев, а учеников — 15. Здесь «кролики» — это ученики, а «клетки» — это месяца. Так как $15 > 12$, то найдётся не менее двух учеников, отмечающих свой день рождения в одном месяце, то есть в одной «клетке» будет не менее двух «кроликов».

Пример 50. В лесу растет миллион ёлок. Известно, что на каждой ёлке не более шестисот тысяч иголок. Докажите, что в лесу найдутся две ёлки с одинаковым количеством иголок.

Решение. Миллион ёлок — это «кролики». Иголки — это «клетки». Тогда:

$$\begin{gathered}\text{0 иголок — 1 «клетка»;}\\ \text{1 иголка — 2 «клетки»;}\\ \vdots\\ \text{600000 иголок — 600001 «клетка».}\end{gathered}$$

«Клеток» — 600001. Каждый «кролик»–ёлка сажается в клетку с номером, равным количеству иголок на этой ёлке. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кролика»: если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроликов»–ёлок было бы не более 600001 штук. Но если два «кролика»–ёлки сидят в одной «клетке», то количество иголок у них одинаковое.

Упражнения

Задача 91. В ящике лежат красные, синие и зелёные карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо вынуть, чтобы среди взятых обязательно были карандаши одного цвета?

Задача 92. В Москве 12 миллионов жителей. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

Задача 93. Вершины четырёхугольника раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдётся диагональ или сторона, соединяющая вершины одного цвета.

Задача 94. В уездном городе N пять миллионов жителей и 20 административных районов. Докажите, что имеется район, в котором проживает не менее 250 тысяч человек.

Задача 95. В классе 25 человек. Докажите, что найдётся 7 учащихся, имеющих одинаковую четвертную оценку по алгебре.

Задача 96. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

Задача 97. Дано 15 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа таких, что:

- они имеют одинаковые остатки от деления на 14;
- их разность делится на 14.

Задача 98. Докажите, что в любой компании из 6 человек есть двое, имеющих в этой компании одинаковое число знакомых.

При решении задач нам помогает обобщённый принцип Дирихле.

Если в N *клетках* сидят не менее $kN + 1$ *кроликов*, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k + 1$ *кролик*.

Пример 51. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков, в которых находятся яблоки одного и того же сорта.

Решение. Рассадим 25 ящиков–«кроликов» по трем «клеткам»–сортам. Так как $25 = 3 \cdot 8 + 1$, то применим «обобщённый принцип Дирихле» для $N = 3$, $k = 8$ и получаем, что в какой-то «клетке»–сорте не менее 9 ящиков–«кроликов».

Задача 99. В стране m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой команде). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Еще один футболист прилетел на матч на матч на вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.

Задача 100. 15 обезьян собрали 100 бананов. Докажите, что какие-либо две обезьяны собрали одинаковое число бананов.